Tanári útmutató

Egyensúlyok nyomában: Héják, galambok és városi dugók?

Babus Réka, Juhász Péter

I. ÁTTEKINTÉS

Életünket átszövi az egyensúlyra törekvés, amely néha tudatos, néha ösztönös szinten zajlik. Az óra során szeretnénk példát hozni néhány olyan egyensúlyi állapotra, amelyek kialakulását és működési mechanizmusait a matematika segítségével jobban megérthetjük.

Az óra első felében a héja-galamb játékon[1] keresztül vizsgáljuk, milyen matematikai modell írja le egy adott élőhelyen a versengő („héja") és az együttműködő („galamb") stratégiát alkalmazó egyedek arányának alakulását. Rámutatunk arra is, hogy ez az egyensúly nem feltétlenül optimális az egyedek számára, csupán egy olyan helyzet, amelyben egyik viselkedési forma sem tud tartósan előnybe kerülni a másikkal szemben.

A második részben a Braess-paradoxon révén egy, a városi közlekedésben előforduló meglepő helyzetet járunk körbe: Hogyan lehetséges az, hogy egy új út építése növelheti a dugókat? Miként fordulhat elő, hogy minden autós a számára leggyorsabbnak tűnő útvonalat választja, ám a közlekedés egészének működése romlik?

A tanóra abból a szempontból rendhagyó, hogy a matematikát most nem konkrét problémák megoldására, hanem jelenségek megértésére, modellezésére használjuk. Bízunk benne, hogy a diákok átfogóbb képet kapnak arról, hogyan jönnek létre egyensúlyi állapotok, és felismerik, hogy az egyéni döntések és a közös rendszerek

[1] Az ötlet Polák Pétertől, a budapesti Szent István Gimnázium tanárától származik.

kölcsönhatása mennyire összetett folyamat, amelynek értelmezésére a matematika hatékony eszközt nyújt.

II. A tanóra egyes elemeinek időbeli becslése

! Fontos: Az egyes egységekhez rendelt számok reméljük, hogy segítenek megbecsülni, hogy az egyes feladatok hány percet tesznek ki. Ezek viszont csak irányadóak, érdemes a diákok tempójához igazítani, hogy végül mire-mennyi időt szánunk.

Az óra elemei	Rövid leírás	Módszer	Várható időtartam
1.	A héja galamb játék	szerepjáték, közös megbeszélés	8 perc
2.	A héja galamb játék vonatkozásai	egyéni/páros munka, közös megbeszélés	20 perc
3.	Braess paradoxon	tanári előadás, egyéni/páros munka	15 perc
4.	Lezárás	tanári előadás	2 perc

A prezentáció kivetítéséhez szükség lesz laptopra és projektorra. Érdemes továbbá előre kinyomtatni a héja-galamb játék táblázatát. Ezeken kívül csak tábla és filc szükséges a tanórához.

III. A TANÓRA MENETE

1. A héja-galamb játék

Feltételezzük, hogy a tanóra címéből kevesen tudják pontosan, hogy miről is lesz szó – és ez talán nem is baj. Azt javasoljuk, hogy az óra elején ezt ne magyarázzuk túl. Elég, ha jelezzük a tanulóknak, hogy hamarosan kiderül, milyen kapcsolat van a héják és galambok, valamint a városi dugók között. Tartsuk fenn a „balladai homályt”, és vágjunk bele az első témakörbe.

A játék bemutatása

Az óra első felében egy klasszikus játékelméleti feladatról, a héja-galamb játékról lesz szó. Ennek rövid ismertetésével indítsuk az órát:

A játékban a tanulók mindegyike a ,,héja” vagy a ,,galamb” szerepek közül választ magának egyet. A játékosok valamilyen erőforrásért küzdenek: a héják versengenek, harcba bocsátkoznak érte, míg a galambok kooperálnak, megosztják azt. Amikor két galamb találkozik, megosztják az erőforrást, így mindketten azonos nagyságú részét nyerik el. Galamb és héja találkozása esetén az erőforrás nagy része a héjáé lesz, két héja találkozásakor viszont a versengésben elvész az erőforrás, így mindketten nyereség nélkül maradnak.

A helyzetet könnyebben megérthetjük, ha az egyes találkozási kimenetelekhez azokat leíró pontszámokat rendelünk. Az alábbi táblázat a héja-galamb játék hagyományos kifizetési táblázata, amelyet a tanóra során is használunk.

	Héja	**Galamb**
Héja	0, 0	4, 1
Galamb	1, 4	3, 3

A táblázat értelmezése a következő: két héja találkozásakor mindketten 0 pontot kapnak; egy héja és egy galamb találkozásakor a héja 4, a galamb 1 pontot szerez; két galamb találkozásakor pedig mindkét madár 3 ponttal gazdagodik.

A játék menete

Az alaphelyzet ismertetését követően próbáljuk ki a diákokkal a játékot! Ehhez mellékeljük az alábbi pontvezető táblázatot, amit osszunk ki minden tanuló részére.

	1. játék	2. játék	3. játék
Szerepkör			
1. forduló			
2. forduló			
3. forduló			
4. forduló			
5. forduló			
Összesen			

💡 Megjegyzés: Az órán mi két fordulót javaslunk, de a táblázatba betettünk egy 3. oszlopot is, ha esetleg ezt valaki szeretné 3-ra bővíteni.

A játék menete a következő:

1. Minden tanuló választ magának egy szerepet (héja vagy galamb), melyet leír a papírjára
2. A tanulók magukkal viszik a táblázatukat, majd két koncentrikus kört alkotnak úgy, hogy mindenkivel szemben álljon egy társuk. Páratlan létszám esetén a tanár is beáll, hogy mindenkinek jusson pár.
3. Miután mindenki elhelyezkedett, a tanulók felfedik a velük szemben állónak a választott szerepüket, és a megadott kifizetési táblázat alapján elkönyvelik a kapott pontokat.
4. Ezután a külső kör tanulói egy pozícióval jobbra lépnek, így mindenki új ellenfelet kap. Ismét felfedik a szerepüket, majd beírják az adott körben szerzett pontjaikat.
5. Összesen öt kört játszunk, majd a tanulók visszaülnek a helyükre, és összesítik, hány pontot gyűjtöttek.

A megbeszélés során érdemes rákérdezni, hány pontot szerzett a győztes, milyen szerepet választott, valamint arra is, hogy a játékban összesen hány héja és hány galamb vett részt.

Ezután következhet a játék második fordulója, egy új feltétellel: *ha a csoport összpontszáma nem éri el a 200** *pontot, akkor az erőforrások „elvesznek", és mindenki veszít.*

A játékot ugyanúgy játsszuk le: két kör, öt forduló, majd a pontok összesítése. A győztes kihirdetése után vizsgáljuk meg, hogy teljesült-e a kezdeti feltétel, vagyis elérte-e a csoport összesítve a 200 pontot.

Itt adódik a következő kérdés:

Mi a maximális összpontszám, amit a madárpopuláció 5 találkozásból össze tud gyűjteni?

Megoldás: Mivel páratlan létszám esetén a tanár is beáll, biztosak lehetünk abban, hogy egy $2n$ fős, páros létszámú populáció játssza a játékot. Egy körben tehát n találkozás történik. Egy találkozásból a maximálisan megszerezhető pontszám 6 pont, amely két galamb találkozásakor érhető el. Így a csoport körönként összesen $6n$ pontot, öt kört követően pedig legfeljebb $30n$ pontot gyűjthet. Az elérhető maximális pontszám tehát a csoport létszámának a 15-szöröse lesz.

Az órán a csoport konkrét létszámával érdemes számolni. Például, 16 fős csoport esetén körönként 8 találkozás történik, egy körben legfeljebb 48 pont gyűjthető. 5 kör alatt 240 pont a maximális.

💡 *Megjegyzés: A játék során megadott küszöb függjön a csoport létszámától. Ha a csoport számának közel 12-szeresét választjuk, akkor az már kihívást jelent, de még elérhető pontszám.

A rövid fejszámolás után felmerülhet a kérdés: milyen helyzetben éri meg jobban galambnak lenni? A tanulók feltehetően ráéreznek arra, hogy sok héja jelenléte esetén megéri galambnak lenni, míg sok galamb esetén inkább a kevés héja jár jól. Előfordulnak azonban olyan helyzetek is, amikor nem egyértelmű, melyik szerep a kedvezőbb. Vizsgáljunk meg egy ilyen, köztes esetet:

Egy populációban rajtad kívül van 5 galamb és 10 héja. Héja vagy galamb lennél inkább?

💡 Megjegyzés: Javasoljuk, hogy némi gondolkodási idő után szavazzon a csoport, hogy ki, milyen szerepkört választana, és csak ezt követően beszéljük meg a feladatot.

Megoldás: Annak az esélye, hogy egy körben galambbal találkozunk, fele annyi, mint annak, hogy héjával. Így a galambbal való találkozás esélye $\frac{1}{3}$, míg a héjával való találkozás esélye $\frac{2}{3}$. Nézzük meg, hogy mikor, hány pontot gyűjthetünk egy körben: Galambként: $3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ pont. Héjaként: $4 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ pont. Így ezek mellett a feltételek mellett galambként gyűjtünk átlagosan több pontot egy kör alatt. 5 körben ez $\frac{25}{3}$ és $\frac{20}{3}$ pontot jelent. Látjuk tehát, hogy 5 galamb és 10 héja mellett galambként éri meg élni az életünket.

💡 Megjegyzés: Annak ellenére, hogy a tanulóknak erre a játék során nem volt lehetősége, itt, úgy mint az állatvilágban, megengedjük, hogy egy egyeddel többször is találkozzunk.

💡 Megjegyzés.: Felmerülhet a kérdés, hogy 5 kör alatt kell-e minél több pontot gyűjteni, illetve hogy meddig fog tartani a játék. Ha úgy érezzük, hogy a tanulóknak kézzelfoghatóbb a feladat, ha 5 körrel számolnak, akkor érdemes így feltenni a kérdést, majd ebből kiindulva kérdezni őket, hogy hosszú távon melyik szerepkör éri meg jobban.

Feltételezhető, hogy ezen a ponton a galambok száma elkezd nőni, aminek következtében egy ponton túl ismét a héják járnak majd jobban. A természet törekszik az egyensúly létrehozására. Így jogosan merül fel a kérdés, hogy van-e olyan állapot amikor ugyanolyan kedvezőek a héja és galamb állapotok.

Hány héja és hány galamb esetén van egyensúlyban a két szerepkör, ha tudjuk, hogy összesen 16 madár van?

💡 Megjegyzés: Előfordulhat, hogy többen megvizsgálják, hogy a konkrét héja- és galambszámok mikor, mennyire kedvezőek és ez alapján jutnak el a következtetésre. Ha van ilyen megoldó, akkor érdemes előbb ezt a gondolatmenetet meghallgatni és csak utána általánosítani. Úgy gondoljuk, hogy ez egy jó példa arra, hogy milyen praktikusak tudnak lenni a betűs kifejezések.

Megoldás: g galamb és $h = 16 - g$ héja esetén a körönként szerezhető átlagos pontszám:

- Héjaként: $\frac{g}{15} \cdot 4 + \frac{h-1}{15} \cdot 0 = \frac{4g}{15}$,
- Galambként: $\frac{g-1}{15} \cdot 3 + \frac{h}{15} \cdot 1 = \frac{3(g-1)}{15} + \frac{16-g}{15} = \frac{2g+13}{15}$.

Egyensúlyi állapot akkor jön létre ha a két szerepkörben összegyűjthető átlagpontszám megegyezik, tehát: $\frac{4g}{15} = \frac{2g+13}{15}$, melyből $g = 6,5$ és $h = 9,5$.

Természetesen fél galamb és fél héja nem létezik, így tökéletes egyensúlyi állapot nincsen, ám feltételezhetjük, hogy a galambok száma 6 és 7, a héják száma pedig 9 és 10 között fog ingadozni.

Ezen a ponton érdemes egy kicsit eltávolodni a héja–galamb játéktól, és általánosítani az itt látottakat. A játékkal az állatvilág egy mechanizmusát modelleztük. Hasonló modellekkel és kifizetési táblázatokkal vizsgálhatjuk, hogy bizonyos fajok hogyan élnek egymás mellett. Ilyen módon átfogó képet kaphatunk arról, hogy milyen egyedszámok mellett alakulhat ki egyensúlyi állapot az egyes fajok között. Így információt nyerhetünk arról is, hogy különböző fajok együttélésekor, milyen viselkedési formák maradhatnak fenn hosszú távon, melyek tűnnek el, illetve milyen körülmények között stabil vagy instabil egy ökológiai közösség.

Opcionális kiegészítések

Nagy populáció esetén mit mondhatunk a héja-galamb arányról?

Megoldás: $0 \cdot \frac{h}{16} + 4 \cdot \frac{g}{16} = 1 \cdot \frac{h}{16} + 3 \cdot \frac{g}{16}$.

Ezt átrendezve: $4g = h + 3g$, melyből $g = h$ következik. Nagy populáció esetén tehát várhatóan fele-fele lesz a héja-galamb arány.

Módosítsd az alábbi kifizetési táblázatot úgy, hogy 10 galamb és 6 héja legyen az egyensúlyi állapot!

Megoldás: Tekintsük az alábbi táblázatot, ahol $a < c < d < b$

	Héja	Galamb
Héja	(a;a)	(b;c)
Galamb	(c;b)	(d;d)

💡 Megjegyzés: A táblázatot az alábbi feltételekkel adjuk meg a diákoknak és hívjuk fel a figyelmüket, hogy figyeljenek az a, b, c, d, változók közti egyenlőtlenségekre.

Ekkor a galambként gyűjthető $9d + 6c$ pont meg kell, hogy egyezzen a héjaként bezsebelhető $10b + 5a$ ponttal, melyből $9d + 6c = 10b + 5a$.

Ennek a négyismeretlenes egyenletnek keressük a fenti relációkat kielégítő, egész megoldásait. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = 0$. Ekkor a $9d + 6c = 10b$ egyenletet kapjuk.

Mivel a bal oldal 3-mal osztható, így a jobb oldalnak is 3–mal oszthatónak kell lenni, melyből következik, hogy b is osztható lesz 3-mal. A $b = 3$ túl kevés (csak $c = 1$ és $d = 2$ esetén teljesülnének a relációs viszonyok, ez azonban nem elégíti ki az egyenlőséget), a $b = 6$ sem fog kijönni*, tekintsük viszont a $b = 9$-et.

$9d + 6c = 90$, amiből $3d + 2c = 30$. Az előzőhöz hasonlóan c is osztható 3-mal. Legyen $c = 3$. Ekkor $9d + 18 = 90$, amiből $d = 8$ adódik. Egy lehetséges kifizetési táblázat tehát:

	Héja	Galamb
Héja	(0;0)	(9;3)
Galamb	(3;9)	(8;8)

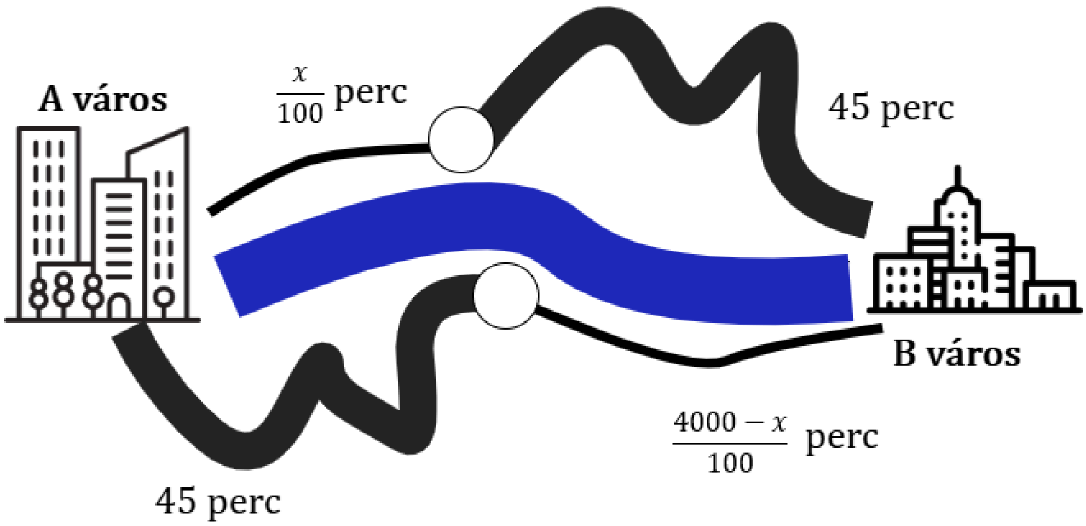
*$b = 6$ esetén $9d + 6c$ =60 melyből $3d + 2c = 20$. d biztosan páros, tudjuk továbbá, hogy $0 < c < d < 6$. Így d legnagyobb értéke 4, c legnagyobb értéke pedig 3. $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18 < 20$, így ez nem lehetséges.

Természetesen a feladatra többféle megoldás is adható.

3. Egyensúly a közlekedésben

Egy éles témaváltást követően egy közlekedési kérdésbe csöppenünk.

Ismertessük az ábrán látható helyzetet:



Két folyó menti város (A és B) között sokan ingáznak autóval. A folyón átívelő hidak csak a városokon belül vannak, ezért az utazóknak el kell dönteniük, hogy a folyó melyik partján haladnak. Mindkét útvonal egy hosszabb, kitérőt tevő autópálya szakaszból és egy szűk, de egyenes útszakaszból áll. Az autópálya nagy forgalmat is elbír, a menetidő itt a forgalomtól függetlenül 45 perc. A szűk, egyenes útszakaszon azonban az előzés időigényes, így a menetidő attól függ, hogy éppen hányan használják: x autó esetén $x/100$ percbe telik végighaladni rajta. Reggelente 4000 autós indul el A városból B-be.

Felmerülhet a következő kérdés:

Hányan menjenek a folyó jobb és bal oldalán, hogy az átlagos menetidő a lehető legkisebb legyen?

Megoldás: Intuitívan adódik, hogy akkor lesz a legkisebb az átlagos menetidő, ha az autók száma egyenlően oszlik meg a két part között. Induljunk ki abból a feltételezésből, hogy az optimális állapot 2000–2000 autós megoszlás. Ekkor kiszámolható, hogy mindenki 65 perc alatt éri el B várost.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha ettől eltérünk, és az egyik úton 2000-nél több, a másikon pedig kevesebb autó közlekedik. Ahány autóval többen mennek az egyik úton, ott annyi századdal nő a menetidő; a másik úton pedig ugyanennyivel csökken. Mivel azonban több autósnak nő a menetideje, mint ahánynak csökken, az átlagos menetidő összességében megnövekszik.

Tehát a 2000–2000-es megoszlásnál kedvezőbb állapot nem érhető el.

Ugyanezt az eredményt kapjuk, hogy ha tekintjük a menetidők összegét és ennek a másodfokú függvénynek keressük meg a minimumhelyét. A menetidők összegét az $f(x) = \frac{x^2}{100} + 45x + 45(4000 - x) + \frac{(4000-x)^2}{100}$ függvény írja le. (Természetesen minél kevesebb a menetidők összege, annál kevesebb lesz az átlagos menetidő is, így felesleges bonyolítás ezt még 4000-el osztani és az átlagot számolni). A függvényt átrendezve: $f(x) = \frac{x^2+4500x+4500(4000-x)+(4000-x)^2}{100} = \frac{2x^2-8000x+4000^2+4000\cdot 4500}{100}$ melynek minimumhelye $\frac{8000}{4} = 2000$-nél van.

A feladat megbeszélése után érdemes hangsúlyozni, hogy 2000-2000 autós esetén lesz egyrészt a lehető legkisebb az átlagos menetidő, másrészt ez az az állapot, amikor minden autós úgy érzi, hogy jó döntést hozott: senkinek sem éri meg a másik úton mennie, mert rosszabbul járna. Ez tehát egy olyan egyensúlyi helyzet, ahol az autósok egyéni döntése és a közösség érdeke összhangba kerül.

Nézzük meg, mi történik, ha ezen az állapoton változtatunk, és új hidat építünk a folyóra. Mielőtt részletesebben belemegyünk a számolásokba, érdemes megkérdezni a tanulókat, mit gondolnak: milyen hatása lesz a hídnak az átlagos menetidőre és az autósok viselkedésére.

Feltételezhetjük, hogy úgy vélik majd, az új út miatt gyorsabban jutnak el az autósok A-ból B-be. Ezek után tegyük fel a kérdést, hogy melyik útvonalat választanák. Gyors számolás után látható, hogy az optimális útvonal a szűk útszakaszon indulni, majd a hídon átkelni a folyó túloldalára, és ott a másik szűk útszakaszon folytatni az utat. Így ugyanis szakaszonként legrosszabb esetben is 40–40 perces menetidő várható, szemben az autópálya 45 percével.

Úgy gondoljuk, hogy erre a tanulók többsége rá fog jönni, és a szavazatokból szépen látszik majd, hogy az új helyzetben mindenki a hidat és a két szűk útszakaszt választja. Ha eddig nem válaszolta meg a csoport, akkor itt kérdezzük meg:

Mennyi lesz ebben az esetben a várható menetidő?

Ha minden autós a szűk útszakaszokat választja, akkor 80 perc alatt ér célba, vagyis az átlagos menetidő a korábbi 65 percről 80 percre nő.

Annak ellenére, hogy mindenki a számára legkedvezőbb döntést hozta, végül mindenki rosszabbul járt, mint a híd megépítése előtt.

Nyilvánvaló, hogy ennek oka az, hogy az autósok mind ugyanazt az útvonalat használják. Felmerülhet a kérdés: ha máshogy osztanánk el az autósokat az útvonalak között, csökkenthetné-e az új híd a korábbi, 65 perces átlagos menetidőt — akár úgy is, hogy néhány autós menetideje hosszabbá válna?

Ha az autósokat jobban osztanánk el, akkor lehetne javítani a korábbi 65 percet?

💡 Megegyzés.: Ez a számolás valószínűleg nem fér bele az óra időkereteibe. Házi feladatnak fel lehet adni a pontos számolást, az órán pedig talán praktikus, ha a megoldás vázát és a konklúziót mondjuk el a tanulóknak.

Megoldás: Minden autós két döntést hoz: először azt, hogy A városból melyik útvonalon indul el, majd a hídhoz érve azt, hogy átkel-e a folyó túloldalára. Az első szakaszon x autós használja a szűk útszakaszt, 4000–x pedig az autópályát. Az ő összmenetidejük: $\frac{x^2}{100} + 45(4000 - x)$. A híd utáni szakaszon ugyanezzel a képlettel írhatjuk le az összmenetidőt, így a teljes útra az utasok összmenetidejét a következő függvény adja meg: $f(x) = \frac{2x^2}{100} + 90(4000 - x) = \frac{2x^2}{100} - 90x + 4000 \cdot 90$

Ennek keressük a minimumhelyét és minimumértékét.

A függvény minimumhelye $\frac{90}{4} \cdot 100 = 2250$ lesz. A minimumérték pedig

$\frac{2\cdot 2250^2}{100} + 90 \cdot 1750 = 258750$, amely a teljes összmenetidő. Ebből az átlagos menetidő: $\frac{258750}{4000} \approx 64,6875$ perc.

Minimálisan tehát csökkenthető lenne az átlagos menetidő, de a nyereség kevesebb mint 20 másodperc. Tudjuk továbbá, hogy ez az optimum akkor jön létre, ha az egyik parton 2250, a másikon 1750 autós halad. Az autópályát választók közül azonban biztosan lesz, aki rájön, hogy legalább 5 perccel gyorsabban érne célba, ha a szűk útszakaszra váltana — ezzel tovább növelve annak forgalmát. Összességében tehát nem reális az, hogy a híd megépítése bármilyen javulást hozna a közlekedési helyzetben.

A jelenséget, amikor egy vagy több út hozzáadása az úthálózathoz lelassíthatja a teljes forgalom áramlását, Braess-paradoxonnak nevezzük.

💡 Megjegyzés: A Braess-paradoxon Dietrich Braess, ma is élő német matematikusról kapta a nevét.

Erre mutatunk is egy konkrét példát:

Dél-Koreában Szöülban az 1980-as években épült a Cshonggyecheon felüljáró, mely egy patak feletti autópálya volt. Kezdetben gyorsította a forgalmat, ám ahogy az autósok száma nőtt, mindenki a legrövidebbnek hitt útvonalat választotta és állandóan bedugult. Elsősorban városszépítési és zöld megfontolásból 2005-ben a polgármester úgy döntött, hogy bontsák le az autópályát. Ez kezdetben sokakban aggodalmat és felháborodást váltott ki, mondván, hogy már így is hatalmas dugók vannak, az autópálya eltávolítása ezt a helyzetet tovább fogja fokozni. Természetesen az autópálya elbontását szorgalmazók tisztában voltak a Braess-paradoxonnal és előzetes kalkulációkat végezve megállapították, hogy a forgalomra összességében pozitív hatással lesz az autópálya eltávolítása. Igazuk is lett, a forgalmi helyzet jelentősen javult az autópálya nélkül. Emellett a városkép is jelentősen megváltozott.

Többek között Németországban, Franciaországban, és az USA-ban is találhatunk hasonló példákat.

Végezetül nézzünk rá egy kicsit távolabbról erre a problémára. A híd felborította a korábbi egyensúlyi állapotot, amikor a köz érdeke és az egyéni érdek egybeesett. Sofőrként joggal gondolhatjuk: „Legjobb lenne, ha mindenki a hosszabb utat választaná, csak én a rövidebbet", ám mivel nem csak mi, hanem az összes többi autós is ezt a logikát követi, végül mindenki számára ugyanaz lesz az optimális útvonal, így mindenki rosszabbul jár.

A híd építése tehát azért rontott a forgalmi helyzeten, mert kialakított egy olyan helyzetet, ahol mindenkinek ugyanaz lett a kedvező döntés. Érdekes belegondolni viszont, hogy önvezető autók esetén ez a probléma kiküszöbölhető lehet. Ők ugyanis nem egyéni, hanem „közös tudattal" rendelkeznek. Összehangolják egymással az útvonalaikat, hogy az a legtöbb autó számára a legkedvezőbb állapotot jelentse. Tehát amikor kivesszük az emberi önzést a döntésből, akkor egy kedvezőbb helyzet állhat elő.

Láttuk tehát, hogy egyensúlyi állapot akkor alakulhat ki, ha mindenki úgy érzi, hogy a saját maga számára a legkedvezőbb döntést hozza. Lehet ez azonban egy olyan egyensúlyi állapot is, amikor bár mindenki úgy érzi, hogy jól jár, mindenki rosszabbul jár, mintha együttműködtek volna.

Ezzel a jelenséggel az élet számos területén találkozhatunk. A matematikának a „Játékelmélet” ága foglalkozik ezzel. Javasoljuk, hogy az órát zárjuk azzal, hogy megemlítünk néhány olyan jelenséget ahol az egyéni és a közérdek ellentétben áll egymással és esetlegesen olyan helyzetet hoz létre amiben mindenki rosszul jár az együttműködés hiányában.

A hadiipari fejlesztésekben gyakran előfordul, hogy az országok egymással versengve hatalmas összegeket fordítanak fegyverkezésre. Ennek fő motivációja az, hogy senki sem szeretne lemaradni a másiktól ezen a téren. Következményként azonban sokszor minden fél irreálisan sok pénzt költ erre a területre.

Hasonló mechanizmus figyelhető meg akkor is, amikor két árus vagy cég ugyanazt a terméket kínálja egymáshoz közel. Értelemszerűen attól vásárolnak majd, aki olcsóbban adja, ezért megéri egy kicsivel alacsonyabb árat kínálni a másiknál. Így azonban könnyen előfordulhat, hogy a felek folyamatosan egymás alá licitálnak, és végül olyan alacsony árra kényszerülnek, amely mindkettőjük számára kedvezőtlen.

A környezetvédelem mindenkit érintő terület, ugyanakkor a környezetbarát magatartás gyakran több erőforrást és pénzt igényel. Emiatt sokan remélik, hogy majd mások viselik a „zöld” hozzáállás költségeit, miközben ők folytatják korábbi, anyagilag kedvezőbb, de környezetszennyező tevékenységüket. Ezt a jelenséget illusztrálja a záró dián látható mém is.